dev : extrema liés.

leçon : 214
réf : Gourdon p 347.

Thm : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\Gamma := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

SI : $\begin{cases} \to f|_\Gamma \text{ admet un extremum local en } a \in \Gamma \\ \to dg_{1,a}, \dots, dg_{r,a} \text{ sont linéairement indépendantes} \end{cases}$ ALORS $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$, $df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, dg_{i,a}$.

dem :
Supposons i) $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$.
ii) $dg_{1,a}, \dots, dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes.

Par ii), $(dg_{i,a})_{1 \leq i \leq r}$ forment une famille libre du dual de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n.
On a donc $r \leq n$. Posons alors $s := n - r \geq 0$.
On identifie désormais $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ et on écrit les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x, y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$.
Écrivons $a = (\alpha, \beta)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^s$, $\beta \in \mathbb{R}^r$.

* cas 1 : $r = n$
Alors $(dg_{i,a})_{1 \leq i \leq r}$ est une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ et on a bien le résultat souhaité.

* cas 2 : $r < n$.
Alors $s \geq 1$ et ii) implique que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r+s}} \quad (x_i = y_{i-s} \ \forall i > s)$$

écrire l'une ou l'autre à voir pendant essai

est de rang r. On peut donc extraire une sous matrice de rang $r \times r$ inversible.
Quitte à réordonner les variables, OPS que la mat avec les r dernières colonnes vérifie cela.

$$\det \left(\frac{\partial g_i(a)}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0.$$

On pose $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^r$, $x \mapsto (g_1(x), \dots, g_r(x))$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ (car les g_i le sont)

$g(a) = 0$. car $a \in \Gamma$.
Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe :
- un voisinage U' de α dans $\mathbb{R}^s$.
- un voisinage $\Omega = U' \times V'$ de $a = (\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^n$.
- $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r) : U' \longrightarrow \mathbb{R}^r$ $\mathcal{C}^1$

tels que :
$$g(x,y) = 0, \ x \in U' \text{ et } (x,y) \in \Omega \iff y = \varphi(x).$$

où $g = (g_1, \dots, g_r)$.

Autrement dit, sur un voisinage de a, les éléments de $\Gamma = \{z \mid g(z) = 0\}$ s'écrivent $(x, \varphi(x))$.
Posons $h(x) := f(x, \varphi(x))$
Pour tout x $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$ et par i), f admet un extremum local en $a \in \Gamma$,
donc h admet un extremum local en $x = \alpha$ car $a = (\alpha, \varphi(\alpha))$

Ainsi : $\forall 1 \leq i \leq s$, $0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}_{\text{dér p/ 1ère var}} + \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(\alpha) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}(a)}_{\text{dér p/ 2e var}}$. ⊛

Par ailleurs, en écrivant les dérivées partielles par rapport aux x_i de $g(x, \varphi(x)) = 0$.
on a :

$$\forall\, 1 \leq k \leq r, \quad \forall\, 1 \leq i \leq s \qquad 0 = \frac{\partial g_k(a)}{\partial x_i(a)} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(a)$$

(en évaluant en a ?)

Ainsi les s premiers vecteurs colonnes de :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ & A & \end{pmatrix}$$

s'expriment linéairement en fonction des r derniers.
d'où $rg(M) \leq r$ et les $r+1$ vecteurs lignes de M forment une famille liée
d'où l'existence de $\mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$ tous non nuls tq :

$$\mu_0\, df_a + \sum_{i=1}^{r} \mu_i\, dg_{i,a} = 0.$$

Par ii), $\mu_0 \neq 0$ et en posant $\lambda_i := -\frac{\mu_i}{\mu_0}$ pour tout i on obtient le résultat souhaité.